

Crescite esponenziali, da Fibonacci a R_t

Federico Poloni (Università di Pisa)

Fibonacci day
23 Novembre 2021

Leonardo Fibonacci



- Nasce attorno al 1170.
- Impara matematica dalla tradizione araba, e diffonde per primo i numeri arabi/indiani in Europa.
- Si sa molto poco su di lui.
- ... ma ancora meno su Aryabhata, al-Khwārizmī, Abu Kamil, ...

Chicchi di riso e scacchiere

Cap. 12 del *Liber Abaci*: alcuni problemi che (oggi) sono stravisti.

Esempio Chicchi di riso su scacchiera.

1	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\approx 9 \times 10^{18}$

Somma dei chicchi di riso

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

Aggiungiamo un chicco sulla prima casella e cominciamo a spostarli verso destra:

2	2	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\approx 9 \times 10^{18}$

Alla fine del processo, 2^{64} chicchi sull'ultima casella.

Somma dei chicchi di riso

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

Aggiungiamo un chicco sulla prima casella e cominciamo a spostarli verso destra:

	4	4	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\approx 9 \times 10^{18}$

Alla fine del processo, 2^{64} chicchi sull'ultima casella.

Somma dei chicchi di riso

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

Aggiungiamo un chicco sulla prima casella e cominciamo a spostarli verso destra:

		8	8	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\approx 9 \times 10^{18}$

Alla fine del processo, 2^{64} chicchi sull'ultima casella.

Somma dei chicchi di riso

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

Aggiungiamo un chicco sulla prima casella e cominciamo a spostarli verso destra:

			16	16	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\approx 9 \times 10^{18}$

Alla fine del processo, 2^{64} chicchi sull'ultima casella.

Somma dei chicchi di riso

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

Aggiungiamo un chicco sulla prima casella e cominciamo a spostarli verso destra:

				32	32	64	128
256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	$\approx 9 \times 10^{18}$

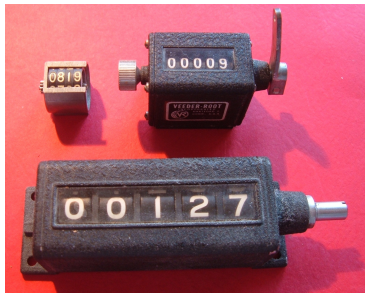
Alla fine del processo, 2^{64} chicchi sull'ultima casella.

Contachilometri

Non diverso dai **riporti** in un contachilometri che passa da 999999 a 1000000.

Anzi, è proprio un **contachilometri binario** che passa da

$$\underbrace{11111 \dots 111}_{64 \text{ uni}} \quad \text{a} \quad 1 \underbrace{000 \dots 000}_{64 \text{ zeri}}.$$



Crescite esponenziali

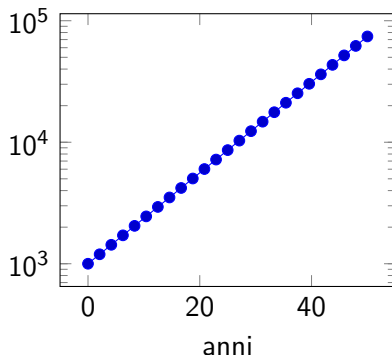
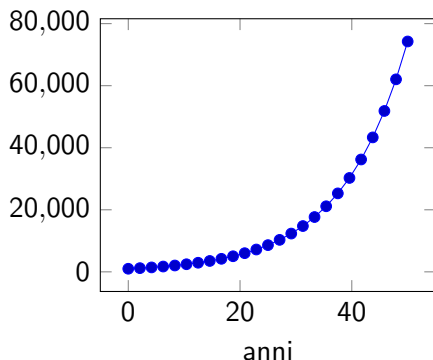
Crescita esponenziale: quando ogni unità di tempo una quantità viene moltiplicata per una costante.

Esempio Se investo una somma con un interesse del 9% annuo, ogni anno viene moltiplicata per 1.09:

anni	0	1	2	3	4	5	6
somma	1000	1090	1188.1	1295.03	1411.58	1538.62	1677.10

Rapporti $\frac{1090}{1000}$, $\frac{1188.1}{1090}$, $\frac{1295.03}{1188.1}$, ... **costanti**.

Grafici



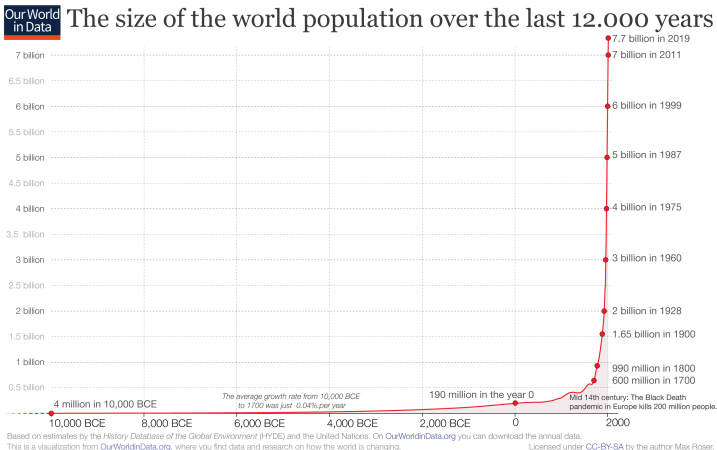
Caratteristica **impennata**. Diventa una retta nella scala **logaritmica** (a destra).

Tempo di raddoppio per questo modello: **8.04** anni.

Altro esempio classico Piegando su sé stesso un foglio di carta 50 volte, lo spessore raddoppia ogni volta e diventa uguale alla distanza tra la **Terra** e la **Luna**.

Popolazione mondiale

“The greatest shortcoming of the human race is our inability to understand the exponential function.” –A.A. Bartlett



Exponential growth bias

Fenomeno studiato in letteratura economica/psicologica: le persone hanno **difficoltà** a comprendere il concetto di crescita esponenziale.

Esempio [Schonger, Sele]

In un paese, ci sono 974 persone infette da COVID. Il numero degli infetti cresce del 26% al giorno. Quante persone saranno infette tra 30 giorni?

Exponential growth bias

M. Schonger, D. Sele

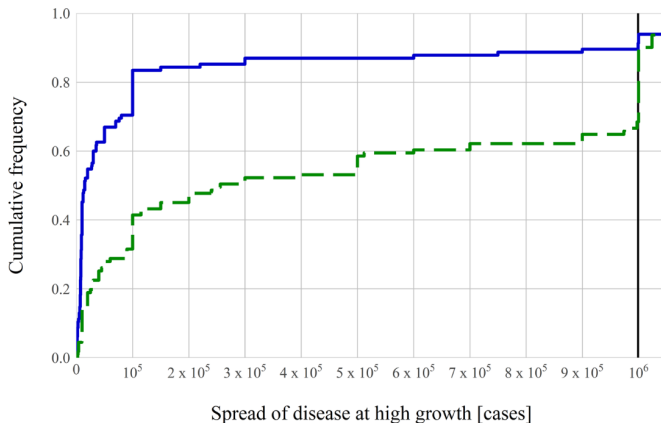
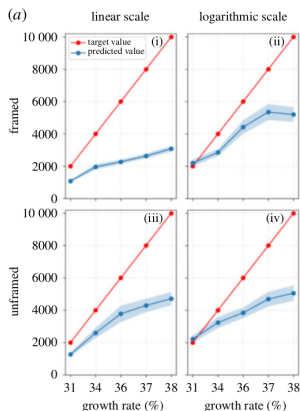


Fig. 2 Effect of framing on exponential growth bias—high growth rate. Cumulative distribution functions of answers. The *blue solid line* shows answers from subjects who receive the information about growth in terms of the daily growth rate of 26% (Group R, $n=115$). The *green dashed line* shows answers from subjects who receive the information about growth in terms of the doubling time of 3 days (Group D, $n=111$). The *thick black vertical line* indicates the true value of about 1 million cases

Conseguenze dell'EGB

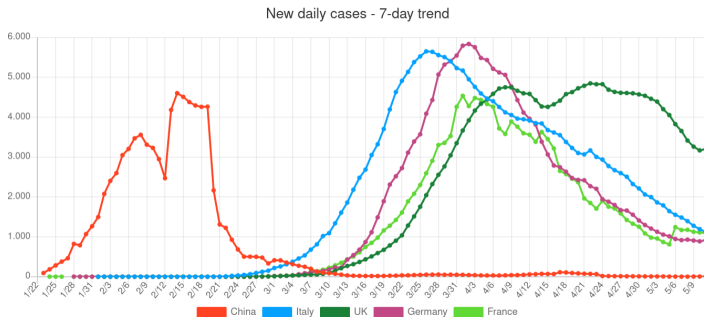
[Goda et al, Stango–Zinman] le persone con più EGB hanno più **debiti** e meno **risparmi per la vecchiaia** (anche controllando per intelligenza ed educazione finanziaria).

[Hutzler et al] sottostimiamo la crescita dei casi di COVID.



Crescita del COVID

Nelle prime fasi, andamento simile per molti paesi.



Meglio pensare in termini di “il paese X è n giorni indietro” che “il paese X ha meno casi”.

Fonte: <https://mackuba.eu/corona/>

Fibonacci ed epidemie

In un certo senso **Fibonacci** fu tra i primi a studiare le epidemie.

Modello

Una persona a Pisa è stata appena infettata dal virus della matematica! Il virus funziona in questo modo: ogni persona che viene infettata contagia due nuove persone, una il primo giorno dopo quello dell'infezione e una il secondo. Quante nuove persone verranno infettate il 30 novembre?

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Fibonacci ed epidemie

In un certo senso **Fibonacci** fu tra i primi a studiare le epidemie.

Modello

Una persona a Pisa è stata appena infettata dal virus della matematica! Il virus funziona in questo modo: ogni persona che viene infettata contagia due nuove persone, una il primo giorno dopo quello dell'infezione e una il secondo. Quante nuove persone verranno infettate il 30 novembre?

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Fibonacci ed esponenziali

I numeri di Fibonacci crescono esponenzialmente!

Ci sono due crescite esponenziali compatibili con la relazione

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}:$$

$$A^n = A^{n-1} + A^{n-2} \iff A^2 = A + 1 \iff \begin{cases} A_1 = 1.61803, \\ A_2 = -0.61803. \end{cases}$$

Quale di queste seguono i numeri di Fibonacci? **Un po' e un po'.**

$$F_n = 0.4472 A_1^n - 0.4472 A_2^n \sim A_1^n.$$

Con tecniche simili si può analizzare ogni regola di infezione di questo tipo:

$$G_n = 0.2G_{n-3} + 0.4G_{n-4} + 0.4G_{n-5} + 0.1G_{n-6}.$$

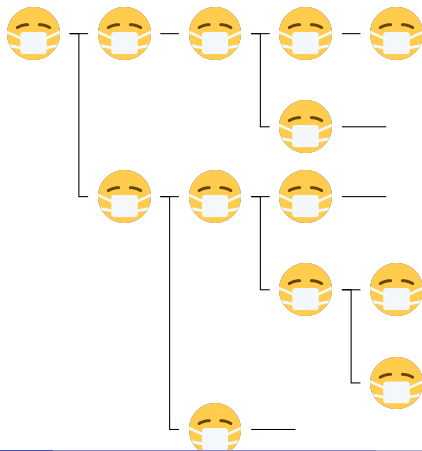
Le infezioni crescono come la **più grande** delle crescite compatibili.

Crescite esponenziali e R_0

R_0 è il **numero di persone** che vengono contagiate da ogni infetto nel nostro modello.

Per il nostro virus della matematica, $R_0 = 2$.

R_0 non guarda il tempo delle infezioni, ma solo le **generazioni**.



R_0 e R_t

(Per i più esperti Nel nostro modello il tasso di crescita, $A_1 = 1.61803$, è diverso da $R_0 = 2$. Cosa succede quando uno di questi due numeri è minore di 1 e l'altro maggiore?)

Provvedimenti temporanei possono portare da

$$G_n = 0.2G_{n-3} + 0.4G_{n-4} + 0.4G_{n-5} + 0.1G_{n-6}$$

a

$$G_n = 0.2G_{n-3} + 0.4G_{n-4} + 0.2G_{n-5} + 0.05G_{n-6}.$$

Questo porta a un R_t che dipende dal tempo.

R_t utile per via della visione meccanicista: cosa dobbiamo fare per ridurlo?
Quante persone vaccinare per l'immunità di gregge?

R_0 e malattie

Malattia	R_0
Influenza	1.2–1.4
Raffreddore	2–3
HIV	2–5
COVID	2.4–3.4
COVID “variante delta”	5–8
Rosolia	6–7
Morbillo	12–18

(Fonte: Wikipedia)

Altro esempio

- Bombe atomiche: la fissione di un atomo di uranio produce 2–3 neutroni, che vanno a causare la fissione di altri atomi, ...
- Similmente, decrescita esponenziale: periodi di dimezzamento. La quantità di **Carbonio-14** si dimezza ogni 5730 anni.
- Altra proprietà poco intuitiva: **assenza di memoria**. Se un atomo di Carbonio-14 non si è ancora dimezzato dopo 5000 anni, la sua vita residua è ancora 5730 anni.
- Greg Egan, *Into darkness*, racconto su un *wormhole* che sopravvive con una distribuzione esponenziale.

Quando i modelli smettono di funzionare

Caso problematico numeri piccoli! Non possiamo avere 0.4 infetti.

Su piccole scale, è necessario introdurre casualità.

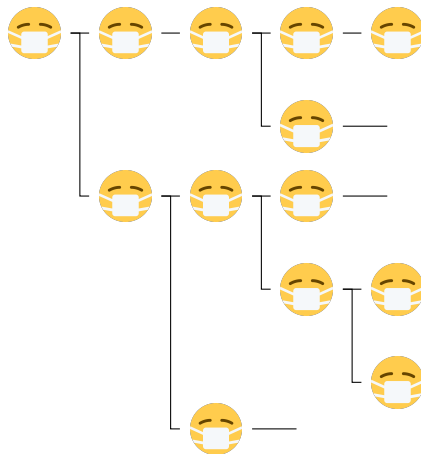
Alberi casuali

Ogni infetto ha **indipendentemente**, ogni giorno,

- Probabilità a di contagiare un'altra persona;
- Probabilità b di restare infetto;
- Probabilità c di guarire.

Partiamo da un infetto solo il giorno 1.

Un albero casuale



Probabilità di guarigione

Con questo modello, qual è la probabilità x che l'epidemia finisca in un tempo futuro (finito)?

Idea Guardiamo a cosa succede il primo giorno!

$$x = \underbrace{a}_{\text{contagio}} \underbrace{x^2}_{\text{entrambe le sotto-epidemie finiscono}} + \underbrace{b}_{\text{nulla l'epidemia finisce}} \underbrace{x}_{\text{finisce}} + \underbrace{c}_{\text{fine immediata}}$$

L'equazione $x = ax^2 + bx + c$ ha due soluzioni: una è 1 (perché $1 = a + b + c$), l'altra è $\frac{c}{a}$.

Domanda

Quale di queste soluzioni è la vera probabilità che l'epidemia finisca?

Risposta alla domanda

È sempre **la più piccola!**

Se $x_n = P[\text{l'epidemia finisce entro i primi } n \text{ giorni}]$, allora

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Teorema

Le quantità x_n non superano mai la soluzione più piccola x_* .

Dimostrazione Ad ogni passo,

$$x_* - x_{n+1} = (ax_*^2 + bx_* + c) - (ax_n^2 + bx_n + c) = a(x_*^2 - x_n^2) + b(x_* - x_n) \geq 0.$$

L'epidemia finisce certamente ($x_* = 1$) solo se $c \leq a$, cioè è più probabile guarire che contagiare.

(Questa condizione equivale a $R_0 \leq 1$.)

Quando i modelli smettono di funzionare — II

Altro problema limiti fisici.

Esempio Moore's law: numero di transistor in un microchip.

Moore's Law: The number of transistors on microchips doubles every two years

Moore's law describes the empirical regularity that the number of transistors on integrated circuits doubles approximately every two years. This advancement is important for other aspects of technological progress in computing – such as processing speed or the price of computers.

Our World
in Data

Transistor count

50,000,000,000

10,000,000,000

5,000,000,000

1,000,000,000

500,000,000

100,000,000

50,000,000

10,000,000

5,000,000

1,000,000

500,000

100,000

50,000

10,000

5,000

1,000

500

250

125

62.5

31.25

15.625

7.8125

3.90625

Year in which the microchip was first introduced

Data source: Wikipedia (wikipedia.org/wiki/Transistor_count)

OurWorldinData.org – Research and data to make progress against the world's largest problems.

Licensed under CC-BY by the authors Hannah Ritchie and Max Roser.

Moore's law

“It can't continue forever. The nature of exponentials is that you push them out and eventually disaster happens.” –Gordon Moore

“[Y]ou can see that we're approaching the size of atoms which is a fundamental barrier, but it'll be two or three generations before we get that far—but that's as far out as we've ever been able to see. We have another 10 to 20 years before we reach a fundamental limit.” –G. Moore, 2005

Un Intel i9 impiega 0.2 nanosecondi per eseguire un'operazione. In questo tempo la luce percorre 6 centimetri.

Moore's law

“It can't continue forever. The nature of exponentials is that you push them out and eventually disaster happens.” –Gordon Moore

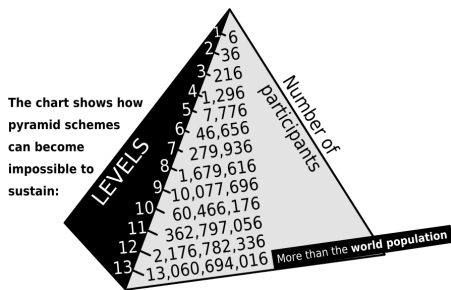
“[Y]ou can see that we're approaching the size of atoms which is a fundamental barrier, but it'll be two or three generations before we get that far—but that's as far out as we've ever been able to see. We have another 10 to 20 years before we reach a fundamental limit.” –G. Moore, 2005

Un Intel i9 impiega **0.2 nanosecondi** per eseguire un'operazione. In questo tempo la **luce** percorre 6 centimetri.

Quando i modelli smettono di funzionare — III

“Anyone who believes exponential growth can go on forever in a finite world is either a madman or an economist.” —attribuita a K.E. Boulding

Esempio schemi a piramide.

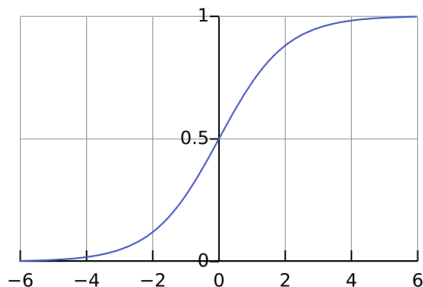


Finiscono le persone!

Problema da considerare anche nei modelli per il COVID (Suscettibili).

Curva logistica

Una soluzione naturale Moltiplicare il tasso R per la probabilità che una persona p sia ancora suscettibile.



In un'epidemia che segue una logistica, il punto chiave è il **centro** della figura: il numero di nuovi infetti giornalieri comincia a **decrescere**, e siamo arrivati a **metà del massimo**.

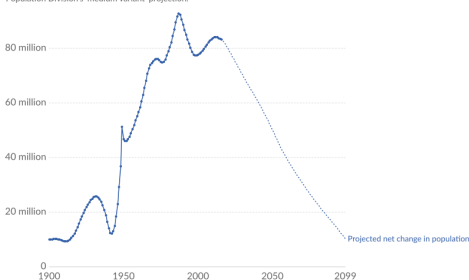
[Youtube: 3Blue1Brown, *Exponential growth and epidemics*]

Sovrappopolazione

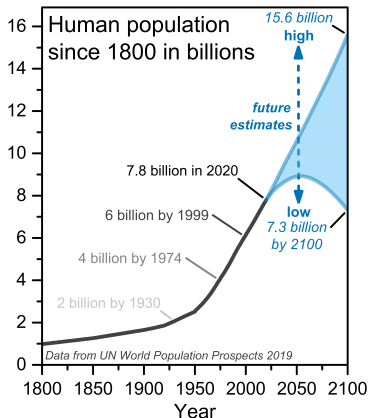
Il numero di nuovi “infeetti” è la chiave anche per valutare la **crescita della popolazione**: siamo vicino al picco.

Absolute increase in global population per year

Absolute population change measures the net increase in total population in any given year e.g. data for 1950 represents the net change in total population from 1950 to 1951. Data projections to 2100 are based on the UN Population Division's 'medium variant' projection.



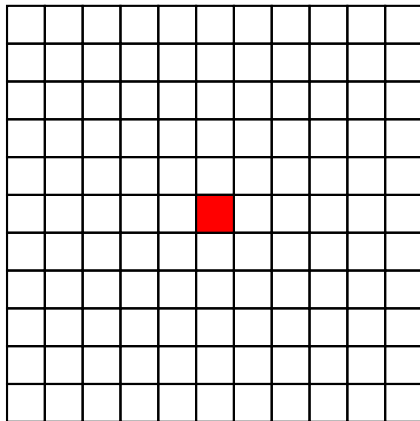
CC BY



Secondo alcuni modelli, non arriveremo mai a 10 miliardi: i **tassi di natalità** si riducono con la modernizzazione.

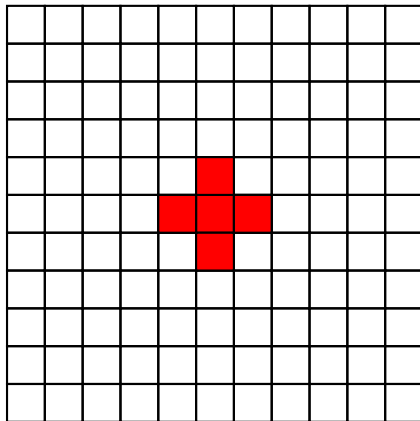
Finiscono le persone

Le **persone da infettare** possono finire (o ridursi) anche per questioni di vicinanza.



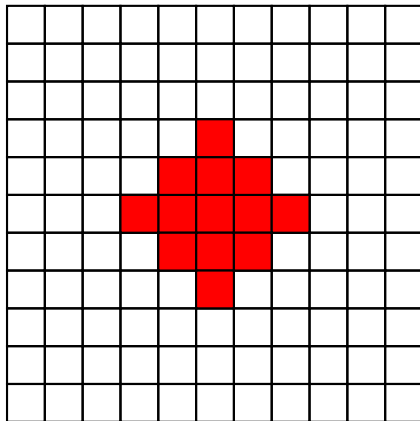
Finiscono le persone

Le **persone da infettare** possono finire (o ridursi) anche per questioni di vicinanza.



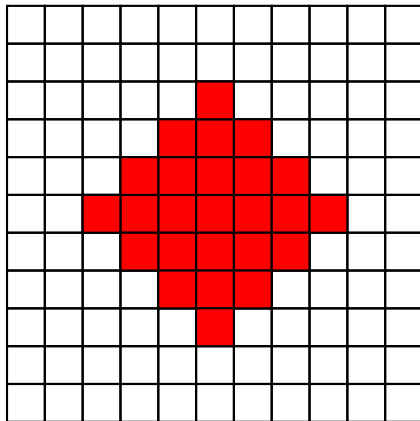
Finiscono le persone

Le **persone da infettare** possono finire (o ridursi) anche per questioni di vicinanza.



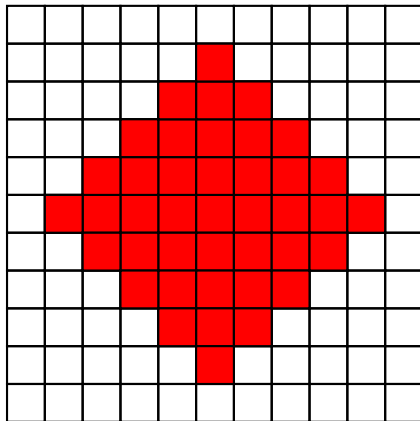
Finiscono le persone

Le **persone da infettare** possono finire (o ridursi) anche per questioni di vicinanza.



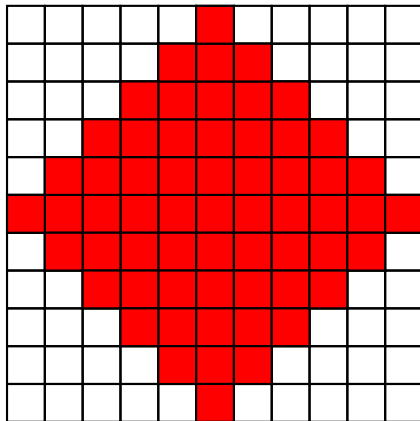
Finiscono le persone

Le **persone da infettare** possono finire (o ridursi) anche per questioni di vicinanza.



Finiscono le persone

Le **persone da infettare** possono finire (o ridursi) anche per questioni di vicinanza.



Epidemiologia spaziale

Ogni infetto può contagiare fino a **4** persone, però in realtà il numero di infetti cresce **quadraticamente**, cioè molto più piano di una crescita esponenziale.

Ridurre i contatti aiuta: chiudere confini tra aree a diversa incidenza, evitare contatti occasionali vs. regolari.

Quanto bene connessa è la nostra **rete di contatti**? Purtroppo molto: 6 degrees of separation.

Epidemiologia spaziale

Ogni infetto può contagiare fino a 4 persone, però in realtà il numero di infetti cresce **quadraticamente**, cioè molto più piano di una crescita esponenziale.

Ridurre i contatti aiuta: chiudere confini tra aree a diversa incidenza, evitare contatti occasionali vs. regolari.

Quanto bene connessa è la nostra **rete di contatti**? Purtroppo molto: 6 degrees of separation.

Conclusioni

- Capire questi modelli ci insegna qualcosa su come si diffonde il virus e come crescono le infezioni.
- “Fare la nostra parte” vuol dire lavarci le mani e indossare mascherine, ma anche **capire** e **insegnare** le crescite esponenziali.

“Our intuition about the future is linear. But the reality of information technology is exponential, and that makes a profound difference. If I take 30 steps linearly, I get to 30. If I take 30 steps exponentially, I get to a billion” —Ray Kurzweil

Grazie dell'ascolto!

Riferimenti

- Immagine Fibonacci: public domain,
<https://it.wikipedia.org/wiki/File:Fibonacci2.jpg>
- Liber Abaci con traduzione:
<https://www.progettofibonacci.it/xFR/abaci-fr.html>
- Contachilometri: CC BY-SA ArnoldReinhold <https://en.wikipedia.org/wiki/File:CountersMechanical.agr.jpg>
- Popolazione mondiale:
<https://ourworldindata.org/world-population-growth>
- Studi su exponential growth bias:
<https://doi.org/10.1007/s00591-021-00306-7>,
<http://www.nber.org/papers/w21482>,
<https://doi.org/10.1098/rsos.201574>

Riferimenti

- Icona infetto: Twemoji project, Copyright 2020 Twitter, Inc and other contributors. CC-BY-4.0.
- Pyramid scheme: public domain,
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pyramid_scheme.svg.
(With thanks to A. Kolecka for the idea.)
- Immagine logistica:
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pyramid_scheme.svg
- Crescita della popolazione:
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Absolute_increase_in_global_population_per_year,_OWID.svg,
https://en.wikipedia.org/wiki/File:Human_population_since_1800.png